

Oszthatósági feladatok:

1. Fogalmazd meg és bizonyítsd be tízes számrendszerben a
 - a. 10-zel,
 - b. 2-vel,
 - c. 5-tel,
 - d. 4-gyel,
 - e. 25-tel,
 - f. 9-cel és
 - g. 11-gyel való oszthatóság szabályát!
2. Milyen számjegyeket írhatunk x és y helyére, hogy igaz legyen: $45 \mid 24x68y$?
3. Tudjuk, hogy az $5a - 4b$ és a $9a + 3b$ kifejezések mindegyike osztható 17-tel. Bizonyítsuk be, hogy a $11b - a$ kifejezés szintén osztható 17-tel.¹
4. Bizonyítsuk be, hogy minden n egész szám esetén $n + 4 \mid n^3 - 2n^2 - 16n + 32$ teljesül.
5. Bizonyítsuk be, hogy
 - a. $5 \mid 4 \cdot 6^{2019} + 5^{2019} - 4$,
 - b. $5 \mid 4 \cdot 6^n + 5^n - 4$, $n = 1; 2; 3; \dots$!²
6. Bizonyítsuk be, hogy ha a pozitív egész számokat osszadjuk 1-től 1000-ig, akkor a kapott összeg osztható 7-tel!³
7. Bizonyítsuk be, hogy $9 \mid 4^n + 15n - 1$ minden n pozitív egész számra teljesül!⁴

Pozitív osztók száma, összege, szorzata:

8. Számítsd ki a 2500 pozitív osztóinak
 - a. számát;
 - b. összegét;
 - c. szorzatát!

Prímszámokra vonatkozó feladatok:

9. Van-e olyan p prímszám, amelyre $p + 4$ és $p + 14$ is prímszám?
10. Keressük meg az összes olyan pozitív egész számokból álló számpárt, melyek összege és szorzata is prímszám!⁵

¹ Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából 3943. feladata alapján.

² Matematika feladatgyűjtemény I. („Sárga feladatgyűjtemény”) 52. oldal 146. g) alapján.

³ Egységes érettségi feladatgyűjtemény Matematika I. 438. feladata alapján.

⁴ Sokszínű matematika 12. tankönyv 31. oldal 4. példája.

⁵ 2019. évi Négy megye matematika versenye 1. feladata

11.

- Bizonyítsuk be, hogy bármely 3-tól különböző prímszám négyzete 3-mal osztva csak 1-et adhat maradékul.
- Van-e olyan p prímszám, amelyre $4p^2 + 5$ is prím?

Legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, relatív prímek:

12. Határozzuk meg az 1840 és 3400 számok legnagyobb közös osztóját, legkisebb közös többszörösét.

- Egyszerűsítsük egy lépésben a $\frac{1840}{3400}$.
- Végezzük el a kivonást: $\frac{1}{3400} - \frac{1}{1840}$.
- Végezzük el az összeadást: $\frac{3}{1840} + \frac{1}{3400}$.⁶

13. Egy szigeten koncertet szerveznek, ahová egy 150 férőhelyes hajó szállítja a nézőket több fordulóval, és a koncert után egy 180 férőhelyes hajón jönnek vissza. Hány néző oda-vissza szállítása oldható meg így, ha a hajókon minden helyet ki kell használni, de túlterhelni nem lehet őket? Mennyi a minimális nézőszám, amelyre megoldható a szállítás?⁷

14. Egy gyerekcsapat a nyári vakáció idején egy láda kincsre bukkant. A ládában 96 ezüst tálka, 144 ezüst pohár és 200 igazgyöngy volt. A gyerekek éppen annyian voltak, hogy mind a háromféle tárgyon igazságosan tudtak volna osztozni. Legfeljebb hányan lehettek?⁸

15.

- Mit kapunk, ha két pozitív egész szám legnagyobb közös osztóját és legkisebb közös többszörösét összeszorozzuk?
- Két természetes szám szorzata 105, legnagyobb közös osztójuk pedig a 3. Melyek ezek a számok?

16. Melyek azok a 24-nél kisebb pozitív egész számok, amelyek relatív prímek 24-gyel?

Maradékosztályok:

17. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely 2-vel, 3-mal, 4-gyel és 5-tel osztva egyaránt 1-et ad maradékul?

18. Melyik az a legkisebb természetes szám, amely 2-vel osztva 1, 3-mal osztva 2, 4-gyel osztva 3, 5-tel osztva 4 maradékot ad?⁹

19.

- Mennyi a négyes maradéka a 782, 783, 784 és 785 számoknak?
- Mennyi a négyes maradéka az alábbi műveletek eredményének?

$$782 + 783$$

⁶ Egységes érettségi feladatgyűjtemény Matematika I. 457. feladata alapján.

⁷ Egységes érettségi feladatgyűjtemény Matematika I. 459. feladata.

⁸ Matematika feladatok Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek 1888. feladata alapján.

⁹ Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából 3937. feladata.

$$782 \cdot 783$$

$$785^{2019}$$

$$783^{2019}$$

20. Bizonyítsuk be, hogy $6 \mid 2018^{2019} + 2020^{2019}$ teljesül!

Számrendszerek:

21.

- a. Írd át hetes számrendszerbe az 1819 tízes számrendszerbeli számot.
- b. Írd át tízes számrendszerbe az 1011001 kettes számrendszerbeli számot.

22. Fogalmazd meg és bizonyítsd be kilences számrendszerben a

- a. 9-cel,
- b. 3-mal,
- c. 8-cal,
- d. 10-zel való oszthatóság szabályát!

23. Fogalmazd meg és bizonyítsd be hatos számrendszerben a

- a. 36-tal,
- b. 4-gyel,
- c. 9-cel való oszthatóság szabályát!

24. Mennyi a maradék, ha a

- a. 23851_9 számot 8-cal osztjuk?
- b. 435221_6 számot 7-tel osztjuk?

25. Végezzük el az alábbi műveleteket!

- a. $32324_5 + 133241_5 =$
- b. $5656354_7 + 4342514_7 =$
- c. $223123_4 \cdot 103_4 =$

Diophantoszi egyenletek:

26. Oldjuk meg az $5x + 2y = 40$ egyenletet az egész számpárok halmazán!

27. Oldjuk meg az $xy + x + y = 1988$ egyenletet a természetes számpárok halmazán!

28. Bontsuk fel a 283-at két pozitív egész szám összegére úgy, hogy az egyik tag osztható legyen 13-mal, a másik pedig 17-tel!¹⁰

29. Ha két egész szám szorzatához hozzáadjuk az összegüket, akkor 34-et kapunk. Melyik ez a két szám?¹¹

¹⁰ Matematika feladatgyűjtemény I. („Sárga feladatgyűjtemény”) 185. oldal 310. feladata alapján.

¹¹ Matematika feladatgyűjtemény I. („Sárga feladatgyűjtemény”) 185. oldal 309. feladata